ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2001, том 41, № 3, с. 355–359

УДК 519.677

ВАРИАНТ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ С УЗЛАМИ НА ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДАЛЬНЫХ СЕТКАХ[1)]

© 2001 г. В. Б. Кашкин, М. В. Носков, Н. Н. Осипов

(660074 Красноярск, ул. Киренского, 26, Красноярский гос. техн. ун-т)

Поступила в редакцию 03.11.99 г.
Переработанный вариант 24.07.2000 г.

Предлагается вариант дискретного преобразования Фурье в многомерном случае, связанный с использованием решетчатых кубатурных формул, точных на тригонометрических многочленах.

Пусть функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ – периодическая функция n переменных с периодом 1 по каждой переменной. Предположим, что она может быть разложена в абсолютно сходящийся ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} e^{2\pi i(\alpha, x)}, \quad \sum_{\alpha} |a_{\alpha}| < \infty. \tag{1}$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$, $(\alpha, x) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$.

При дискретном преобразовании Фурье устанавливается взаимно однозначное соответствие между последовательностью значений функции $f(x)$ в узлах $x^{(j)}$, $1 \le j \le N$, и множеством чисел A_s, $1 \le s \le N$, так что тригонометрический полином

$$T(x) = \sum_{s=1}^{N} A_s \exp[2\pi i(\alpha^{(s)}, x)]$$

восстанавливает функцию $f(x)$ в указанных узлах, т.е.

$$T(x^{(j)}) = f(x^{(j)}), \quad 1 \le j \le N,$$

при этом число A_s, $1 \le s \le N$, есть кубатурная сумма в кубатурной формуле

$$a_{\alpha^{(s)}} = \int\limits_{[0,1)^n} f(x)\exp[-2\pi i(\alpha^{(s)}, x)]dx \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(x^{(j)})\exp[-2\pi i(\alpha^{(s)}, x^{(j)})] = A_s, \tag{2}$$

т.е. приближенное значение коэффициента Фурье ряда (1) с индексом $\alpha^{(s)}$.

Традиционные методы кратных дискретных преобразований Фурье [1] предполагают множество индексов $\alpha^{(s)}$ таковым, что

$$S(x) = \sum_{s=1}^{N} a_{\alpha^{(s)}} \exp[2\pi i(\alpha^{(s)}, x)] \tag{3}$$

есть кубическая частичная сумма ряда (1), поэтому, в частности, $N = N_*^n$ для некоторого натурального N_*. Узлы $x^{(j)}$, в которых вычисляется функция $f(x)$, при этом предполагают принадлежащими кубической решетке, т.е. n-й декартовой степени множества $\{k/N_* : 0 \le k < N_*\}$.

В данной работе предлагается вариант дискретного преобразования Фурье, связанный с треугольными частичными суммами ряда (1). Напомним, что треугольной частичной суммой ряда

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 99-01-00765).

Фурье называется сумма (3), у которой индексы $\alpha^{(s)} = (\alpha_1^{(s)}, \ldots, \alpha_n^{(s)})$ входящих в нее коэффициентов ряда Фурье удовлетворяют условию

$$\left|\alpha^{(s)}\right| = \left|\alpha_1^{(s)}\right| + \ldots + \left|\alpha_n^{(s)}\right| \le d,$$

где d – некоторое фиксированное натуральное число [2].

В построении взаимно однозначного соответствия между множествами $\{f(x^{(j)})\}_{j=1}^N$ и $\{A_s\}_{s=1}^N$ в этом варианте кратного дискретного преобразования Фурье мы будем придерживаться схемы изложения, предложенной в [3] для одномерного случая.

Рассмотрим кубатурную формулу вида

$$I[f] = \int\limits_{[0,1)^n} f(x)dx \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(x^{(j)}) = \sum_{j=1}^{N} f(\{p_1 j/N\}, \ldots, \{p_n j/N\}) = Q[f], \tag{4}$$

где $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}$, $\{t\}$ – дробная часть числа t. О множестве узлов такой кубатурной формулы говорят, что они образуют параллелепипедальную сетку [4]. Обозначим через $L(p) = L(p_1, \ldots, p_n)$ множество узлов кубатурной формулы (4). Тригонометрическим мономом от n переменных будем называть функцию вида

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \exp[2\pi i(\alpha, x)].$$

Степень монома $\varphi_\alpha(x)$ есть число $|\alpha| = |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|$. Будем говорить, что кубатурная формула (4) имеет тригонометрическую степень d, если $I[\varphi_\alpha(x)] = Q[\varphi_\alpha(x)]$ для всех α таких, что $|\alpha| \le d$, и существует хотя бы один моном $\varphi_{\alpha_*}(x)$, $|\alpha_*| = d + 1$, для которого $I[\varphi_{\alpha_*}(x)] \ne Q[\varphi_{\alpha_*}(x)]$.

Пусть $L^*(p)$ – дуальная к $L(p)$ решетка:

$$L^*(p) = \{\beta \in \mathbb{Z}^n : (\beta, x^{(j)}) \in \mathbb{Z}, 1 \le j \le N\}.$$

Если числа $p_1, \ldots, p_n, N$ в совокупности взаимно просты, то, как легко видеть, фактор-множество $\mathbb{Z}^n(p) = \mathbb{Z}^n/L^*(p)$ содержит в точности N смежных классов (β и β' принадлежат разным смежным классам тогда и только тогда, когда $(\beta, p) \not\equiv (\beta', p) \bmod N$). Для β, β', взятых из одного смежного класса, имеем

$$\varphi_\beta(x^{(j)}) = \varphi_{\beta'}(x^{(j)}), \quad 1 \le j \le N.$$

Выберем из каждого смежного класса по представителю $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(N)}$, тогда при любом j, $1 \le j \le N$, будем иметь

$$f(x^{(j)}) = \sum_{s=1}^{N} A_s \varphi_{\alpha^{(s)}}(x^{(j)}), \tag{5}$$

при этом

$$A_s = \sum_{\beta \in L^*(p)} a_{\alpha^{(s)} + \beta}.$$

Если на множестве функций, определенных на $L(p)$, ввести скалярное произведение

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \varphi(x^{(j)})\overline{\psi(x^{(j)})},$$

то функции $\varphi_{\alpha^{(s)}}(x)$, $1 \le s \le N$, образуют ортонормированную систему. Тогда из (5) следует

$$A_s = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(x^{(j)})\overline{\varphi_{\alpha^{(s)}}(x^{(j)})},$$

и нужное взаимно однозначное соответствие между множествами $\{f(x^{(j)})\}_{j=1}^{N}$ и $\{A_s\}_{s=1}^{N}$ установлено.

Будем теперь считать вектор $p = (p_1, \ldots, p_n)$ таким, что кубатурная формула (4) имеет заданную тригонометрическую степень d. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$(\alpha, p) \neq 0 \bmod N$$

для всех α, удовлетворяющих условию $0 < |\alpha| \le d$, и $(\alpha_*, p) \equiv 0 \bmod N$ для некоторого α_* с $|\alpha_*| = d + 1$. Из условий точности кубатурной формулы (4) следует, что все индексы α с $|\alpha| \le [d/2]$ принадлежат разным смежным классам, а потому их можно считать входящими в систему выбранных представителей смежных классов. Далее, предположим, что число узлов N минимально, т.е.

$$N = \begin{cases} |Q_m^n|, & d = 2m, \\ 2|\tilde{Q}_m^n|, & d = 2m + 1, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$Q_m^n = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n : |\alpha| \le m\}, \quad \tilde{Q}_m^n = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n : |\alpha| \le m, |\alpha| \equiv m \bmod 2\}$$

(о нижней границе для числа узлов кубатурных формул тригонометрической степени d см., например, [5]). Тогда при четном $d = 2m$ в качестве системы представителей смежных классов можно взять множество Q_m^n, а при нечетном $d = 2m + 1$ – множество $\tilde{Q}_m^n \cup \tilde{Q}_m^n(\varepsilon)$, где $\tilde{Q}_m^n(\varepsilon)$ – сдвиг множества $\tilde{Q}_m^n$ на вектор ε, причем $|\varepsilon|$ нечетно (например, $\varepsilon = (1, 0, \ldots, 0)$).

Приведем конкретный пример реализации изложенной схемы в двумерном случае ($n = 2$). В этом случае при любом d существуют кубатурные формулы (4) тригонометрической степени d с числом узлов (6) (см. [6]). Рассмотрим следующую кубатурную формулу тригонометрической степени $d = 2m + 1$ с минимальным числом узлов $N = 2(m + 1)^2$:

$$\int_0^1\int_0^1 f(x, y)dxdy \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(\{j/N\}, \{(2m+1)j/N\}). \tag{7}$$

Здесь $p = (1, 2m + 1)$. Одну из систем представителей смежных классов фактор-множества $\mathbb{Z}^2(p)$ (соответствующую вектору $\varepsilon = (1, 0)$) можно описать так: в нее входят те и только те $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, для которых либо $|\alpha| \le m$, либо $|\alpha| = m + 1$ и $\alpha_1 \le 1$.

Применение параллелепипедальных сеток позволяет (с учетом периодичности функции $f(x)$) рассматривать узлы сетки лежащими на одной прямой, определяемой вектором p. Таким образом, задача n-мерного дискретного преобразования Фурье сводится к одномерному случаю, причем при подходящих N можно применять те или иные быстрые алгоритмы, например метод Кули–Тьюки (см. [1]).

Переход к одномерности при осуществлении дискретного преобразования Фурье дает возможность использовать каждый узел однократно. Как известно [1], в n-мерном случае каждый узел используется n раз.

Вычисление приближенных значений коэффициентов Фурье по формуле (2) в традиционных методах [1] проводится на основе декартова произведения n одномерных квадратурных формул с N_* узлами. При этом тригонометрическая степень такой кубатурной формулы с $N = N_*^n$ узлами равна $N_* - 1$. Однако существуют кубатурные формулы такой же тригонометрической степени, но имеющие значительно меньшее число узлов (см., например, [5]). Так, в приведенном выше примере тригонометрическая степень кубатурной формулы (7) с $N = 2^{17}$ узлами равна $2^9 - 1$. Декартово произведение двух одномерных квадратурных формул, обладающее той же тригонометрической степенью, потребовало бы 2^{18} узлов. Тем самым в предлагаемом варианте дискретного преобразования Фурье можно использовать меньшее число узлов, чем в традиционных методах, без существенного снижения точности вычисления коэффициентов Фурье.

Конечно, в треугольной частичной сумме (3), содержащей тригонометрические мономы $\varphi_\alpha(x)$ степени не выше d, меньше слагаемых, чем в соответствующей кубической частичной сумме, включающей тригонометрические мономы $\varphi_\alpha(x)$, для которых $|\alpha_i| \le d$, $1 \le i \le n$. Однако, учитывая

Таблица

N_K	S_K	N_H	S_H
441	0.010412	450	0.005406
529	0.003485	512	0.005285
625	0.003345	648	0.004123
729	0.007225	722	0.004055
841	0.002487	882	0.003278
961	0.002407	968	0.003236
1089	0.005387	1058	0.003032
1225	0.001888	1250	0.002660
1369	0.001837	1352	0.002511
1521	0.004214	1568	0.002236
1681	0.001496	1682	0.002124

стремление к нулю коэффициентов a_α при увеличении $|\alpha|$, можно ожидать, что качество предлагаемого варианта дискретного преобразования Фурье будет не хуже, чем при использовании традиционных схем.

Отметим, что равенство $A_\alpha = A_{\alpha+\beta}$, где α – индекс коэффициента ряда Фурье, а $\beta \in L^*(p)$, позволяет так формировать массивы гармоник A_α, что к обратному преобразованию также можно применить убыстряющие алгоритмы.

Был проведен ряд вычислительных экспериментов с целью сравнения точности вычисления коэффициентов двумерного дискретного преобразования Фурье по стандартной методике и по методике с использованием предложенного варианта преобразования (при различном числе узлов). Применялось классическое преобразование Фурье без убыстряющих алгоритмов.

Рассматривалось "шахматное поле", содержащее 5 белых и 4 черных квадрата. Размер стороны каждого квадрата 1/3 от размера стороны всего поля. Белому полю приписывалось значение 0, черному 1. Были вычислены точные значения коэффициентов Фурье, которые затем сравнивались со значениями коэффициентов, найденными по двум упомянутым методикам; число узлов подбиралось таким образом, чтобы для обеих методик оно было приблизительно одинаковым. В первом столбце таблицы приведено число узлов N_K стандартной (квадратной) решетки, во втором – значения среднеквадратического отклонения S_K коэффициентов для этого случая, в третьем столбце – число узлов N_H для решетки, рассматриваемой в данной статье (наклонная решетка), и в четвертом – значения среднеквадратического отклонения S_H коэффициентов для наклонной решетки.

Из таблицы следует, что значения среднеквадратического отклонения коэффициентов Фурье для наклонной решетки приблизительно такие же, как у квадратной; тенденция к уменьшению погрешности с ростом числа узлов более стабильна, чем при квадратной решетке.

Функция $F(x, y) = \sum_{k=1}^{10} \chi_k(x, y)$, где

$$\chi_k(x, y) = \begin{cases} \sqrt{10^{-2} - (x - x_k)^2 - (y - y_k)^2}, & \text{если } (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 \le 10^{-2}, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

описывает изображение 10 полусфер радиуса 1/10 с центрами (x_k, y_k). При проведении вычислительного эксперимента центры полусфер размещались в квадрате 2×2 случайным образом по равномерному закону распределения. По квадратной решетке из 121 узла вычислялись коэффициенты Фурье, далее выполнялось обратное преобразование и сравнивались исходная функция и результат этого преобразования, причем сравнение проводилось не только в узлах, но и в некоторых их окрестностях по 1000 случайно выбранным (по равномерному закону распределения) точкам. Абсолютное среднеквадратическое отклонение в этом случае составило $\varepsilon^2 = 9.213 \times 10^{-5}$. Та же процедура с наклонной решеткой из 128 узлов дала $\varepsilon^2 = 8.889 \times 10^{-5}$.

Двумерное преобразование Фурье с наклонной решеткой было успешно использовано при обработке реальных двумерных изображений формата 512×512 пиксел. Для ускорения вычислений использовался алгоритм Кули–Тьюки.

При одинаковом числе узлов время, затраченное на вычисление с наклонной решеткой, почти в 1.5 раза меньше, чем с квадратной. Это связано с тем, что при двумерном преобразовании Фурье с использованием квадратной решетки каждый узел обходится дважды, а с использованием наклонной решетки – лишь один раз. При вдвое меньшем числе узлов наклонная решетки обеспечивает ускорение вычислений приблизительно в 3 раза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989.
2. *Янушаускас А.И.* Кратные тригонометрические ряды. Новосибирск: Наука, 1986.
3. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1975.
4. *Коробов Н.М.* Теоретикочисловые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
5. *Носков М.В.* Кубатурные формулы для приближенного интегрирования периодических функций // Методы вычислений. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. Вып. 14. С. 15–23.
6. *Носков М.В.* О формулах приближенного интегрирования для периодических функций // Методы вычислений. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1991. Вып. 16. С. 16–23.